

Третий тур 29.11.2025. Вторая лига.

1. Обозначим через \mathcal{P} множество всех многочленов от одной переменной, все коэффициенты которых принадлежат множеству $\{0, 1\}$. Ненулевые целые числа a и b таковы, что для любого $P(x) \in \mathcal{P}$ число $P(b)$ делится на $P(a)$. Докажите, что $a = b$.

2. Саша расставил в клетках бесконечной клетчатой плоскости целые числа так, чтобы в каждой клетке было ровно одно число, и каждое целое число встречалось ровно один раз. Всегда ли Игорь сможет найти такой квадрат 2×2 , что в двух противоположных углах стоят числа a и b , в двух других углах — c и d , и ни одно из чисел c, d не лежит между a и b ?

3. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(xy) + f(f(y)) = f((x+1)f(y))$$

для всех вещественных x и y .

4. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Ω . Для каждой точки P на окружности Ω , отличной от вершин треугольника, обозначим через A_P , B_P и C_P точки пересечения касательной в точке P к Ω с касательными в точках A , B и C к Ω соответственно. Докажите, что существуют ровно три таких точки P , что перпендикуляры из A_P к BC , из B_P к CA и из C_P к AB пересекаются в одной точке. Причем эти три точки являются вершинами равностороннего треугольника.

5. Найдите целую часть числа

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6 - 1} + \sqrt{10^6} + \sqrt{10^6 + 1}}.$$

6. Пусть n — натуральное число. Для каждого непустого подмножества множества $\{1, 2, 3, \dots, n^4\}$ на доску выписали произведение чисел в нем. Докажите, что среди выписанных чисел найдутся хотя бы F_{n^2-n+1} равных. Напомним, что через F_k обозначено k -ое число Фибоначчи, где $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ для всех натуральных k .

7. Пусть n — натуральное число. Миша выписал на доску остатки чисел $1^2 - 6 \cdot 1 + 1$, $2^2 - 6 \cdot 2 + 1$, \dots , $n^2 - 6 \cdot n + 1$ от деления на n , а Леша выписал на доску остатки чисел 1^2 , 2^2 , \dots , n^2 от деления на n . Оказалось, что у них получился один и тот же набор из n чисел. Чему может быть равно n ?

8. В турнире по теннису участвуют 2^n игроков с рейтингами $1, 2, 3, \dots, 2^n$, где 1 соответствует самому высокому рейтингу, а 2^n — самому низкому. В каждом туре еще не выбывшие участники упорядочиваются по исходному рейтингу, и первый играет со вторым, третий с четвертым, \dots . В каждом матче игрок с более высоким рейтингом побеждает с вероятностью p . Победители в каждом из матчей проходят в следующий тур, где снова разбиваются на пары по тому же правилу и так далее. Найдите математическое ожидание рейтинга победителя турнира. Ничьих в теннисе не бывает.

9. На отрезках AB и AC_1 выбраны точки B_1 и C соответственно так, что $BB_1 = CC_1 = 1$. Докажите, что расстояние между центрами вписанных окружностей треугольников AB_1C_1 и ABC не больше 1.

10. Дан выпуклый многогранник P . Три параллельных плоскости α , β , γ , находящихся (в этом порядке) на равных расстояниях друг от друга, пересекают P по многоугольникам A , B и C соответственно. Известно, что в A можно вписать квадрат со стороной a , а в C — квадрат со стороной c . При каком наибольшем b можно гарантировать, что B содержит квадрат со стороной b ?

Третий тур 29.11.2025. Третья лига.

1. Для каких натуральных чисел a существует бесконечно много таких натуральных чисел n , что число $n! - a$ является точным квадратом?

2. Саша расставил в клетках бесконечной клетчатой плоскости целые числа так, чтобы в каждой клетке было ровно одно число, и каждое целое число встречалось ровно один раз. Всегда ли Игорь сможет найти такой квадрат 2×2 , что в двух противоположных углах стоят числа a и b , в двух других углах — c и d , и ни одно из чисел c , d не лежит между a и b ?

3. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(xy) + f(f(y)) = f((x+1)f(y))$$

для всех вещественных x и y .

4. В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина стороны BC , а точка H — ортоцентр. На окружности, построенной на AH как на диаметре, выбрали точки P и Q так, что M , P и Q — одна прямая. Докажите, что ортоцентр треугольника APQ лежит на описанной окружности треугольника ABC .

5. Найдите целую часть числа

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6 - 1} + \sqrt{10^6} + \sqrt{10^6 + 1}}.$$

6. Пусть n — натуральное число. Для каждого непустого подмножества множества $\{1, 2, 3, \dots, n^4\}$ на доску выписали произведение чисел в нем. Докажите, что среди выписанных чисел найдутся хотя бы F_{n^2-n+1} равных. Напомним, что через F_k обозначено k -ое число Фибоначчи, где $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ для всех натуральных k .

7. Пусть n — натуральное число. Миша выписал на доску остатки чисел $1^2 - 1 + 1$, $2^2 - 2 + 1$, \dots , $n^2 - n + 1$ от деления на n , а Леша выписал на доску остатки чисел 1^2 , 2^2 , \dots , n^2 от деления на n . Оказалось, что у них получился один и тот же набор из n чисел. Чему может быть равно n ?

8. В турнире по теннису участвуют 2^n игроков с рейтингами $1, 2, 3, \dots, 2^n$, где 1 соответствует самому высокому рейтингу, а 2^n — самому низкому. В каждом туре еще не выбывшие участники упорядочиваются по исходному рейтингу, и первый играет со вторым, третий с четвертым, \dots . В каждом матче игрок с более высоким рейтингом побеждает с вероятностью p . Победители в каждом из матчей проходят в следующий тур, где снова разбиваются на пары по тому же правилу и так далее. Найдите математическое ожидание рейтинга победителя турнира. Ничьих в теннисе не бывает.

9. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Точки A' , B' и C' — середины отрезков AI , BI и CI соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'B'C'$ пересекает стороны треугольника ABC не более чем в четырех точках.

10. На плоскости отмечено n точек. Докажите, что для любых положительных a и b найдется не более $2n^2$ дельтоидов с вершинами в отмеченных точках, длина каждой стороны которого равна a или b .